ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN, NĂM 2011
Môn thi: Toán học
(Dùng cho mọi thí sinh thi vào trường chuyên)
Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1.

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-1)y^2 + x + y = 3 \\ (y-2)x^2 + y = x + 1. \end{cases}$$

2. Giải phương trình
$$\sqrt{x + \frac{3}{x}} = \frac{x^2 + 7}{2(x+1)}.$$

Câu 2.

1. Chứng minh rằng không tồn tại các bộ ba số nguyên (x, y, z) thỏa mãn đẳng thức $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$.

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn đẳng thức $(x+1)^4 - (x-1)^4 = y^3$.

Câu 3. Cho hình bình hành $ABCD$ với $\widehat{BAD} < 90^\circ$. Đường phân giác của góc $\widehat{BCD}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại O khác C. Kẻ đường thẳng (d) đi qua A và vuông góc với CO. Đường thẳng (d) lần lượt cắt các đường thẳng CB, CD tại E, F.

1. Chứng minh rằng $\Delta OBE = \Delta ODC$.

2. Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF.

3. Gọi giao điểm của OC và BD là I. Chứng minh rằng $IB.BE.EI = ID.DF.FI$.

Câu 4. Với x, y là những số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P = \sqrt{\frac{x^3}{x^3 + 8y^3}} + \sqrt{\frac{4y^3}{y^3 + (x+y)^3}}.$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN, NĂM 2011
Môn thi: Toán học
(Dùng cho thí sinh thi vào chuyên Toán và chuyên Tin)
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1.

1. Giải phương trình $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=1$.
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=2x^2y^2 \\ (x+y)(1+xy)=4x^2y^2. \end{cases}$

Câu 2.

1. Với mọi số thực a, ta ký hiệu $[a]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá a. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì biểu thức

$$n+\left[\sqrt[3]{n-\frac{1}{27}}+\frac{1}{3}\right]^2$$

không biểu diễn được dưới dạng lập phương của một số nguyên.

2. Với x,y,z là các số thực dương thoả mãn $xy+yz+zx=5$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P=\frac{3x+3y+2z}{\sqrt{6(x^5+5)}+\sqrt{6(y^2+5)}+\sqrt{z^2+5}}.$$

Câu 3. Cho hình thang $ABCD$ với $BC \parallel AD$. Các góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{CDA}$ là các góc nhọn. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau ở I. Gọi P là điểm bất kì trên đoạn thẳng BC ($P \neq B,C$). Giả sử đường tròn ngoại tiếp $\triangle BIP$ cắt đoạn thẳng PA ở M khác P và đường tròn ngoại tiếp $\triangle CIP$ cắt đoạn thẳng PD tại N khác P.

1. Chứng minh rằng 5 điểm A,M,I,N,D cùng thuộc một đường tròn, gọi đường tròn này là (K)
2. Giả sử BM cắt CN ở Q. Chứng minh Q cũng thuộc (K).
3. Trong trường hợp P,I,Q thẳng hàng, chứng minh rằng $\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{BD}{CA}$.

Câu 4. Giả sử A là một tập con của tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$. Tập A có phần tử nhỏ nhất là 1, phần tử lớn nhất là 100 và mỗi $x \in A, x \neq 1$ luôn tồn tại $a,b \in A$ sao cho $x=a+b$ (a có thể bằng b). Hãy tìm một tập A có số phần tử nhỏ nhất.

——————Hết——————